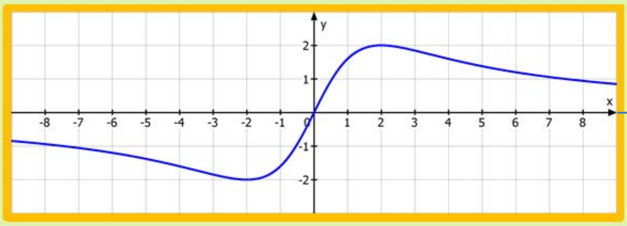
Serpentine



Text Nr. 54160

Stand 16.3.16

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Serpentine ist eine algebraische Kurve 3. Grades, die man auf einer geometrischen Eigenschaft definieren kann. Man kennt sie bereits seit 1692 (de L'Hospital und Huygens) sowie Newton (1701). Sie lässt sich auch durch eine einfache gebrochen rationale Funktion darstellen.

Der mathematische Aufwand hält sich in Grenzen, weshalb sich diese Kurve gut von Schülern der Oberstufe untersuchen lässt.

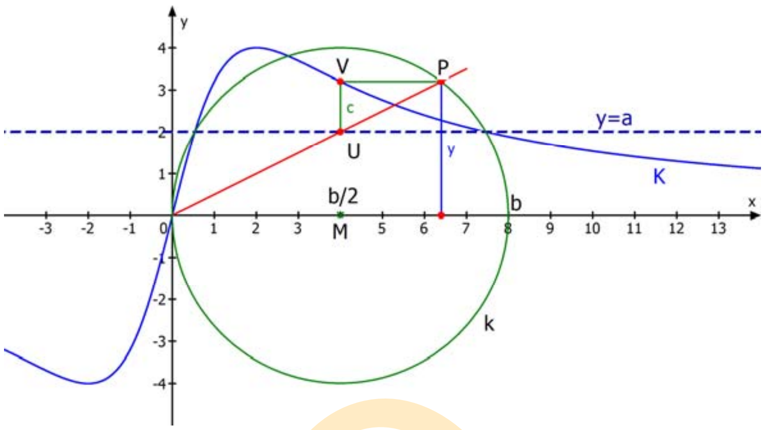
Eine ähnliche Kurve ist die Versiera der Agnesi (Text 54155)

Inhalt

1 Definition und Gleichung

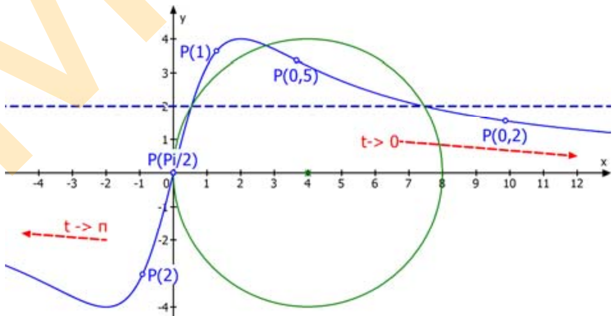
1.1 Konstruktion der Serpentine als Ortskurve:

1. Zeichne den Kreis k um $M\left(\frac{b}{2} \mid 0\right)$ mit Radius $\frac{b}{2}$ und eine Parallele zur x-Achse mit der Gleichung y = a.
2. Eine Ursprungsgerade g: $y = mx$ schneidet g in U und k in V.
3. Die Parallelen zur x-Achse durch U und zur y-Achse durch V schneiden sich in einem Punkt P.



Die **Serpentine** ist die Kurve, die aus allen diesen Punkt P und deren Spiegelbild bezüglich des Ursprungs besteht, zusammen noch mit dem Ursprung.

1.2 Diese Serpentine hat folgende Gleichungen:



Parametergleichungen:

$$x(t) = a \cdot \cot(t) = \frac{a}{\tan(t)} = a \cdot \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

$$y(t) = b \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$$

Mit wachsendem t von 0 bis π wachsendem t durchläuft man die Kurve von rechts nach links, also von ∞ bis $-\infty$.

Koordinatengleichung:

Implizit: $(x^2 + a^2) \cdot y = abx$ und explizit: $f(x) = y = \frac{abx}{x^2 + a^2}$

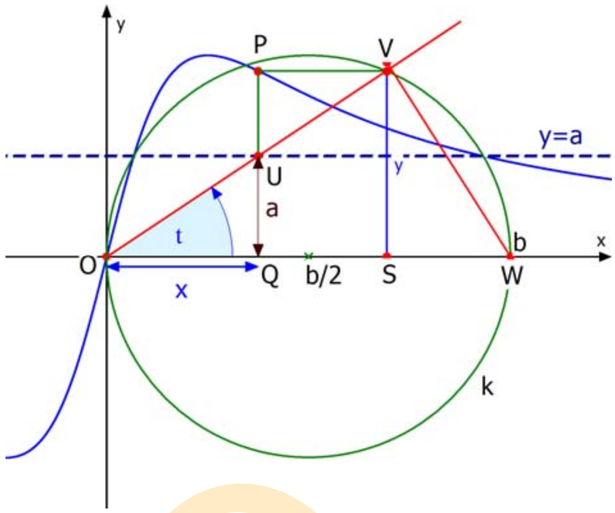
Waagrechte Asymptote ist die x-Achse: y = 0

$$\text{denn } \lim_{x \to \pm\infty} \frac{abx}{x^2 + a^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{ab}{x}}{1 + \frac{a}{x^2}^2} = \frac{0}{1+0} = 0$$

K ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil $f(-x) = -f(x)$ ist.

2 Herleitungen der Gleichungen

2.1 Parametergleichungen



Der Polarkoordinatenwinkel t tritt in den Dreiecken OQU, OSV und OWV auf.
Da V auf dem Kreis liegt hat nach dem Satz von Thales der Winkel $\sphericalangle OVW\ 90^{O}$.
Also folgt:

$$\cos(t) = \frac{\overline{OV}}{\overline{OW}} = \frac{\overline{OV}}{b} \Rightarrow \overline{OV} = b\cdot\cos(t) \quad (1)$$

Damit kann man im Dreieck OSV die Strecke SV = y berechnen:

$$\sin(t) = \frac{\overline{SV}}{\overline{OV}} \quad \Rightarrow \quad y = \overline{SV} = \overline{OV}\cdot\sin(t) = b\cdot\cos(t)\cdot\sin(t) \quad (2)$$

Und im Dreieck OQU folgt: $\tan(t) = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a}{\tan(t)}$

Ergebnis:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= a\cdot\cot(t) = \frac{a}{\tan(t)} = a\cdot\frac{\cos(t)}{\sin(t)} \\ y(t) &= b\cdot\sin(t)\cdot\cos(t) \end{aligned}}$$

Die Funktion Kotengens ist der Kehrwert des Tangens….

Hinweis: Bei dieser Herleitung ist der Faktor 2 aufgetreten

2.2 Koordinatengleichung aus der Parametergleichung

Ich berechne

$$x^2 + a^2 = a^2\cdot\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} + a^2 = a^2\cdot\left(\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} + 1\right) = a^2\cdot\frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\sin^2(t)} = a^2\frac{1}{\sin^2(t)} \qquad |\cdot y$$

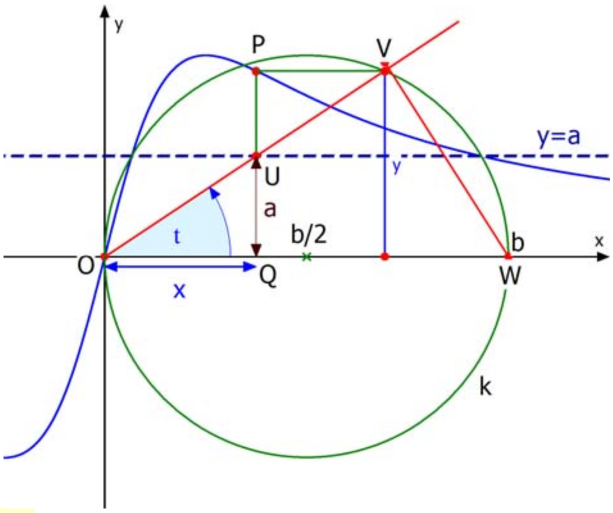
$$\left(x^2 + a^2\right)\cdot y = a^2\frac{y}{\sin^2(t)}$$

Ich ersetze rechts $y = 2b\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)$

$$\left(x^2 + a^2\right)\cdot y = a^2\frac{b\cdot\cancel{\sin(t)}\cdot\cos(t)}{\sin^{\cancel{2}}(t)} = a^2 b\cdot\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

Beachtet man nun, dass $x = a\cdot\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ ist, dann folgt $\left(x^2 + a^2\right)\cdot y = abx$.

2.2 Koordinatengleichung aus der Definition



Wir betrachten die Strahlensatzfigur VOS.

Die Strahlen OV und OW werden von den parallelen QU und SW geschnitten. Daher gilt:

$$\frac{\overline{VS}}{\overline{UQ}} = \frac{\overline{OS}}{\overline{OQ}} \qquad \text{(2. Strahlensatz)}$$

d. h. $\frac{y}{a} = \frac{x_V}{x} \quad \Rightarrow \quad x_V = \frac{xy}{a}$

Der Punkt $V(u_V \mid y)$ liegt auf dem Kreis k

um $M(b \mid 0)$ mit dem Radius b und der Gleichung

$$\left(x - \tfrac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{b^2}{4}$$

Also erfüllt V die Kreisgleichung: $\left(x_V - \tfrac{b}{2}\right)^2 + {y_V}^2 = \tfrac{b^2}{4}$

$${x_V}^2 - bx_V + \cancel{\tfrac{1}{4}b^2} + {y_V}^2 = \cancel{\tfrac{1}{4}b^2}$$

$y_V = y$ und $x_V = \frac{xy}{a}$ einsetzen; $\frac{x^2y^2}{a^2} - b\frac{xy}{a} + y^2 = 0 \quad | \cdot a^2$

$$x^2y^2 - abxy + a^2y^2 = 0$$

y ausklammern: $y \cdot \left[x^2y + a^2y - abx\right] = 0$

bzw. $y \cdot \left[\left(x^2 + a^2\right)y - abx\right] = 0$

Das ist ein Nullprodukt.

1. Faktor = 0:

$$y = 0$$

2. Faktor = 0: $\left(x^2 + a^2\right)y - abx = 0$

$$y = \frac{abx}{x^2 + a^2}$$

3 Ableitungen, Extrem- und Wendepunkte

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \frac{abx}{x^2 + a^2} = ab \cdot \frac{x}{x^2 + a^2}$ Es seien a, b > 0.

Quotientenregel:

$$f'(x) = ab\frac{1\cdot\left(x^2+a^2\right) - 2x\cdot x}{\left(x^2+a^2\right)^2} = ab\cdot\frac{a^2 - x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}$$

$$f''(x) = ab\cdot\frac{-2x\cdot\left(x^2+a^2\right)^2 - 2\left(x^2+a^2\right)\cdot 2x\cdot\left(a^2-x^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^4}$$

$$f''(x) = ab\cdot\frac{\cancel{\left(x^2+a^2\right)}\cdot\left[-2x\cdot\left(x^2+a^2\right) - 2\left(a^2-x^2\right)\cdot 2x\right]}{\left(x^2+a^2\right)^{\cancel{4}3}}$$

$$f''(x) = ab\cdot\frac{-2x^3 - 2a^2x - 4a^2x + 4x^3}{\left(x^2+a^2\right)^3} = ab\frac{2x^3 - 6a^2x}{\left(x^2+a^2\right)^3}$$

$$f'''(x) = ab\cdot\frac{\left(6x^2-6a^2\right)\left(x^2+a^2\right)^3 - 3\left(x^2+a^2\right)^2\cdot 2x\cdot\left(2x^3-6a^2x\right)}{\left(x^2+a^2\right)^6}$$

$$f'''(x) = ab\cdot\frac{\cancel{\left(x^2+a^2\right)^2}\left[\left(6x^2-6a^2\right)\left(x^2+a^2\right) - 6x\cdot\left(2x^3-6a^2x\right)\right]}{\left(x^2+a^2\right)^{\cancel{6}4}}$$

$$f'''(x) = ab\cdot\frac{\left(6x^2-6a^2\right)\left(x^2+a^2\right) - 6x\cdot\left(2x^3-6a^2x\right)}{\left(x^2+a^2\right)^4}$$

Extrempunkte:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2 - x^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm a$

Hinreichende Bedingung: $f''(a) = -3ab\cdot\frac{2a^3 + a^3}{\left(2a^2\right)^3} < 0$ Maximum.

y-Koordinate: $f(a) = \frac{a^2b}{2a^2} = \frac{b}{2}$ Also hat K den **Hochpunkt** $H\left(a \mid \frac{1}{2}b\right)$

Weil K punktsymmetrisch zum Ursprung ist, hat K außerdem den **Tiefpunkt** $T\left(-a \mid -\frac{1}{2}b\right)$.

Wendepunkte: $W_1(0 \mid 0)$, $W_{2,3}\left(\pm a\sqrt{3} \mid \pm\frac{1}{4}\sqrt{3}b\right)$**, denn:**

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^3 - 6a^2x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x\left(x^2 - 3a^2\right) = 0$

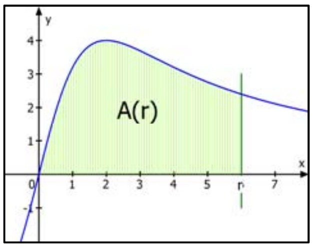
1. Lösung $x = 0$, 2. und 3. Lösung: $x_W = \pm\sqrt{3a^2} = \pm a\sqrt{3}$

Hinreichende Bedingung: $f'''(0) = ab\cdot\frac{\left(-6a^2\right)\left(a^2\right)}{\left(a^2\right)^4} \neq 0$ Wendestelle.

$$f'''\left(a\sqrt{3}\right) = ab\cdot\frac{\left(6\cdot 3a^2 - 6a^2\right)\left(3a^2+a^2\right) - 6\cdot a\sqrt{3}\cdot 0}{\left(3a^2+a^2\right)^4} \neq 0$$

y-Koordinaten: $f\left(a\sqrt{3}\right) = \frac{a^2b\sqrt{3}}{4a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}b$

4 Fläche



Inhalt der Fläche zwischen K, der x-Achse und der Geraden x = r:

$$A(r) = ab\int_0^r \frac{x}{x^2+a^2}dx$$

Substitution: $u = x^2 + a^2 \Rightarrow du = 2x\cdot dx \Rightarrow x\cdot dx = \frac{1}{2}du$

Umrechnung der Grenzen: $x = 0 \Rightarrow u = a^2$, $x = r \Rightarrow u = r^2 + a^2$

$$A(r) = ab\int_0^r \frac{x}{x^2+a^2}dx = \tfrac{1}{2}ab\int_{a^2}^{r^2+a^2}\frac{1}{u}du = \tfrac{1}{2}ab\cdot\left[\ln|u|\right]_{a^2}^{r^2+a^2} = \tfrac{1}{2}ab\cdot\left[\ln\left(r^2+a^2\right)-\ln a^2\right]$$

Nach der 2. Logarithmenregel ist $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}$, also hier:

$$A(r) = \tfrac{1}{2}ab\cdot\ln\frac{r^2+a^2}{a^2} = \tfrac{1}{2}ab\cdot\ln\left(\frac{r^2}{a^2}+1\right) =$$

Grenzwert für $r\to\infty$: Für $x\to\infty \Rightarrow \ln x\to\infty$

Analog: Für $r\to\infty \Rightarrow r^2\to\infty \Rightarrow \ln\left(\frac{r^2}{a^2}+1\right)\to\infty \Rightarrow A(r)\to\infty$

5 Rotationskörper

Rotation der Fläche aus Abschnitt 4 um die x-Achse:

$$V(r)=\pi\int_0^r y^2dx=\pi\int_0^r \frac{a^2b^2x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx \qquad (1)$$

Berechnung von $F(x)=\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx$

1. Schritt: Partialbruchzerlegung:

Ansatz: $\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{A}{x^2+a^2}+\frac{B}{\left(x^2+a^2\right)^2} \qquad |\cdot\left(x^2+a^2\right)^2$

$$x^2=A\cdot\left(x^2+a^2\right)+B$$

$$x^2=Ax^2+\left(Aa^2+B\right)$$

Koeffizientenvergleich: $A=1$ und $Aa^2+B=0 \Rightarrow B=-Aa^2=-a^2$

Ergebnis: $\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}$

Einsetzen: $F(x)=\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\underbrace{\int\frac{1}{x^2+a^2}dx}_{F_1(x)}-a^2\cdot\underbrace{\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx}_{F_2(x)} \qquad (2)$

2. Schritt: Berechnung des 1. Teilintegrals: $F_1(x)=\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\int\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}+1}dx$

Substitution: $u=\frac{x}{a} \Rightarrow x=a\cdot u \Rightarrow dx=a\cdot du$

$$F_1(x)=\int\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}+1}dx=\int\frac{\frac{1}{a^2}}{u^2+1}\cdot adu=\frac{1}{a}\int\frac{1}{u^2+1}du=\frac{1}{a}\cdot\arctan(u) \qquad (3)$$

Rücksubstitution: $u=\frac{x}{a}$:

$$F_1(x)=\frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

3. Schritt: Berechnung des 2. Teilintegrals: $F_2(x)=\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx$

Anwendung der Reduktionsformel aus Text 48052:

$$\boxed{\int\frac{1}{\left(ax^2+b\right)^n}dx=\frac{x}{2b(n-1)\left(ax^2+b\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2b(n-1)}\int\frac{1}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}}dx}$$

Für uns ist a = 1, b übernimmt a^2 und es ist n = 2. Die Formel liefert:

$$\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\frac{x}{2a^2\cdot1\cdot\left(x^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^2\cdot1}\cdot\underbrace{\int\frac{1}{x^2+a^2}dx}_{F_1(x)}$$

Also $F_2(x)=\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^2}\frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

$$F_2(x)=\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^3}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (4)$$

4. Schritt: $F_1(x)$ aus (3) und $F_2(x)$ aus (4) in (2) einsetzen:

$$F(x)=\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\underbrace{\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)}dx}_{F_2(x)}-a^2\cdot\underbrace{\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx}_{F_3(x)}$$

$$F(x)=\frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)-a^2\cdot\left[\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)}+\frac{1}{2a^3}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$F(x)=\frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)}-\frac{1}{2a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

Zusammenfassen:

$$\frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\cdot$$

Einsetzen:

$$F(x)=\frac{1}{2a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)}\quad \boldsymbol{+C}$$

5. Schritt: Einsetzen in (1) und Berechnung des Volumens

$$V(r)=\pi\int_0^r y^2dx=\pi a^2b^2\cdot\int_0^r\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx=\pi\cdot a^2b^2\cdot\left[\frac{1}{2a}\cdot\arctan\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{x}{2\left(x^2+a^2\right)}\right]_0^r$$

$$V(r)=\pi\cdot a^2b^2\cdot\left[\frac{1}{2a}\cdot\arctan\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{r}{2\left(r^2+a^2\right)}\right]-\pi\cdot a^2b^2\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{2a}\cdot\arctan(0)-\frac{0}{2\left(0+a^2\right)}\right]}_{=0}$$

$$V(r)=\pi\cdot a^2b^2\cdot\left[\frac{1}{2a}\cdot\arctan\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{r}{2\left(r^2+a^2\right)}\right].$$

Berechnung der Grenzwerte für $r\to\infty$

$$\lim_{r\to\infty}\arctan\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{1}{2}\pi$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r}{r^2+a^2}=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{1}{r^2}}{1+\frac{a^2}{r^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

$$V=\lim_{r\to\infty}V(r)=\pi\cdot a^2b^2\cdot\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{4}ab^2\cdot\pi^2$$